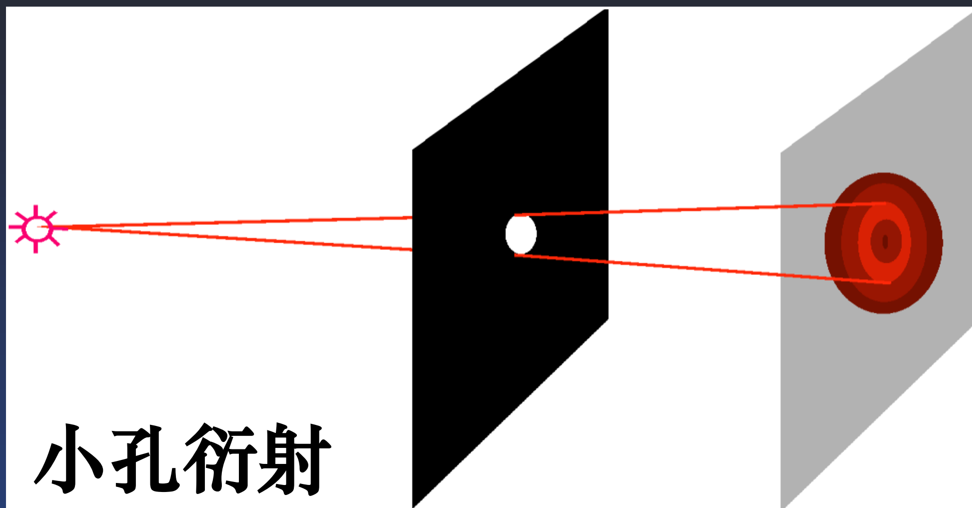
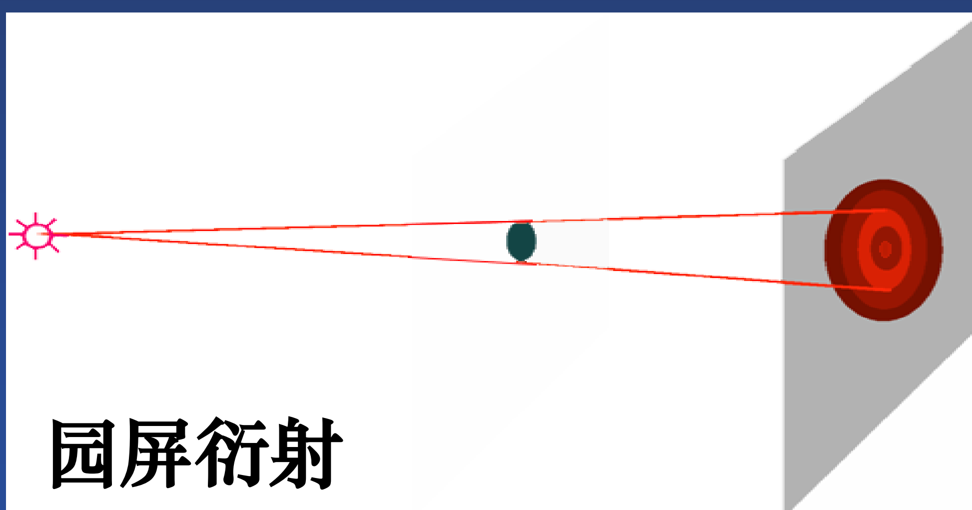
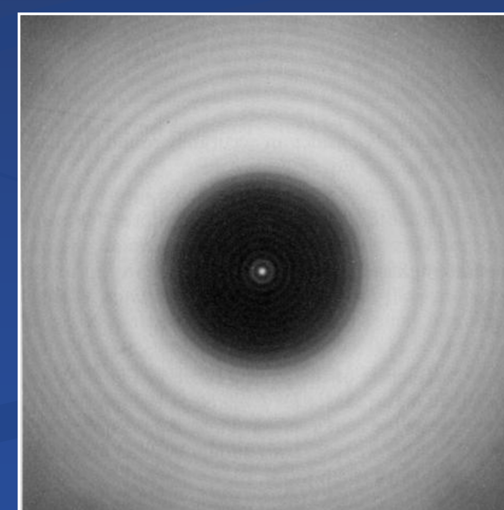
§ 11.5 惠更斯－菲涅尔原理
单缝衍射

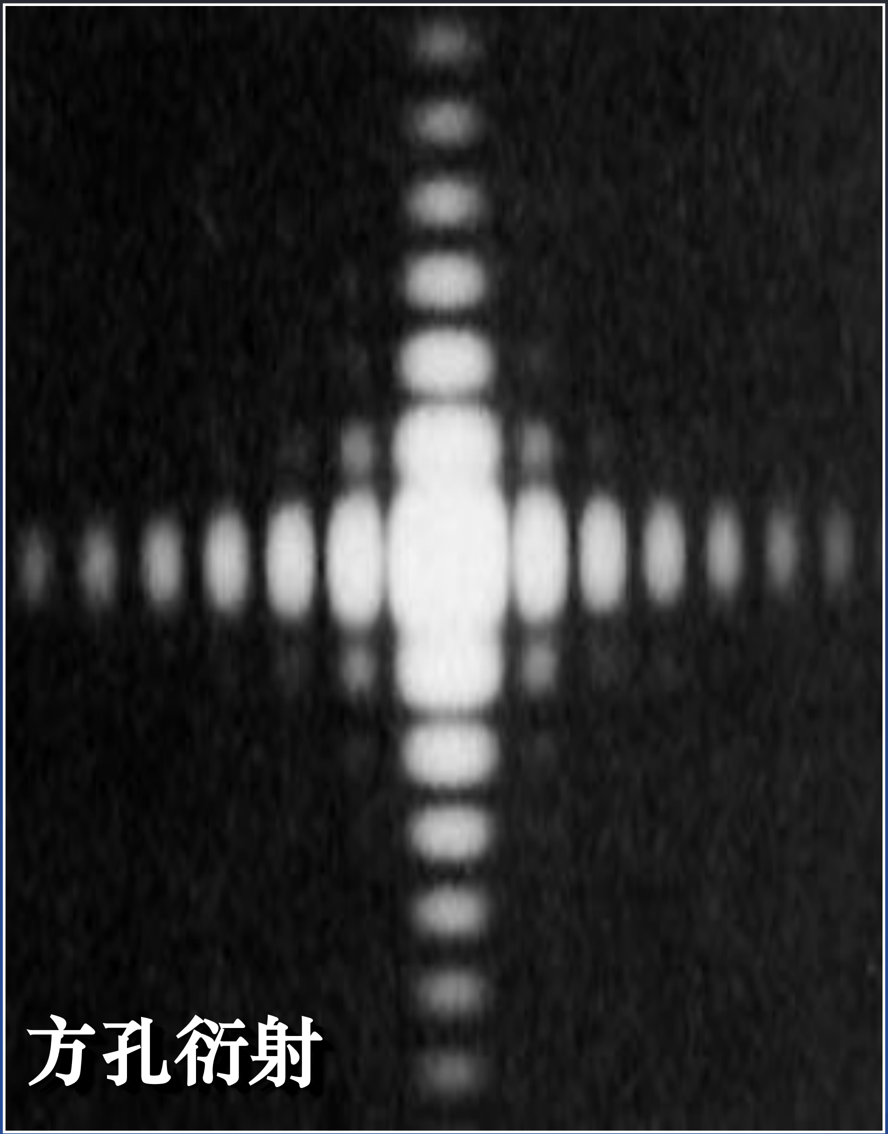
夜晚的亚洲

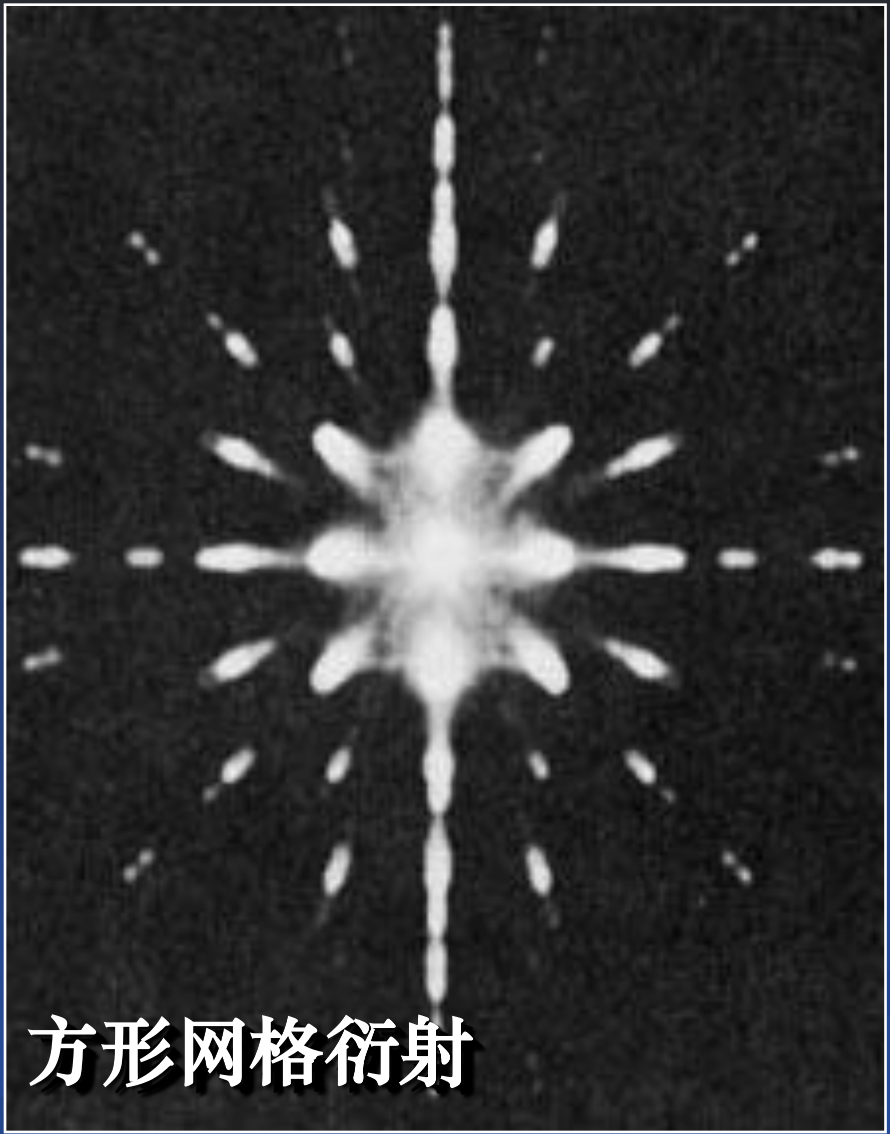
一、光的衍射现象








方孔衍射


方形网格衍射

二、惠更斯－菲涅尔原理

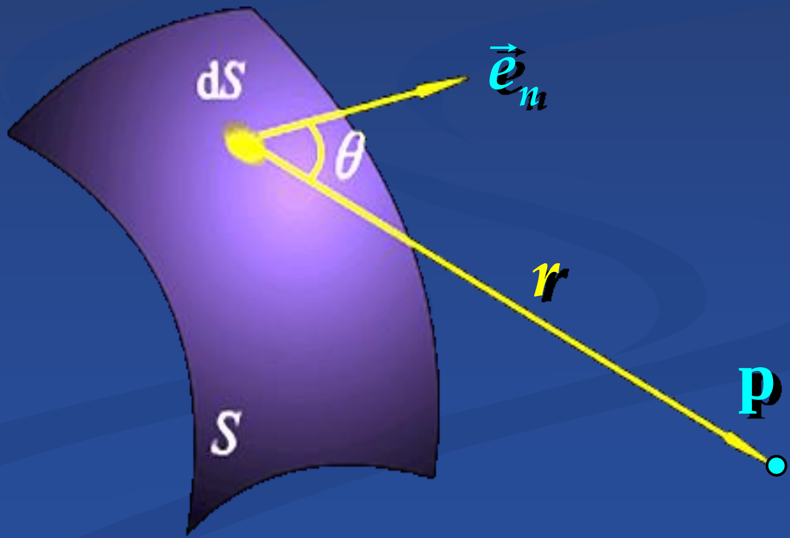
1. 媒质中波动各点皆可当作球面子波的**新波源**；

2. 任意时刻各子波源所发出子波的**包迹**即为新波阵面。

3. **从同一波阵面 S 上各点所发出的子波，传播至某点相遇时，也可相干叠加，产生干涉现象。**

$$dE_{\mathrm{p}} = A_{\mathrm{p}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

$$A_{\mathrm{p}} = c \cdot \frac{a(x,y,z)}{r} \cdot dS \cdot k(\theta)$$



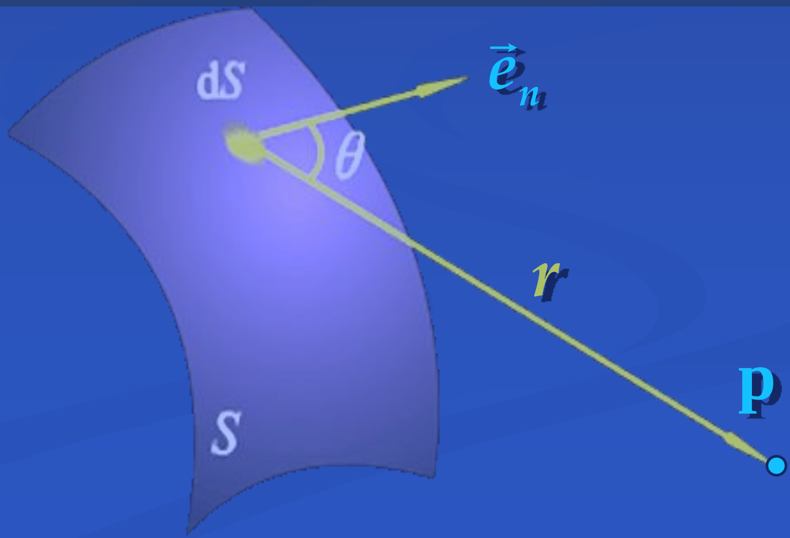
$$k(\theta)=\begin{cases} k_{max} & (\theta=0^{\circ}) \\ 0 & (\theta\geq\dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Fresnel-Kirchhofer衍射积分

$$E_{\mathrm{p}}=c\iint_{S}\frac{a(x,y,z)}{r}k(\theta)\cdot dS\cdot\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda})$$

$$dE_{\mathrm{p}}=A_{\mathrm{p}}\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda})$$

$$A_{\mathrm{p}}=c\cdot\frac{a(x,y,z)}{r}\cdot dS\cdot k(\theta)$$



$$k(\theta)=\begin{cases} k_{max} & (\theta=0^{o}) \\ 0 & (\theta\geq\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

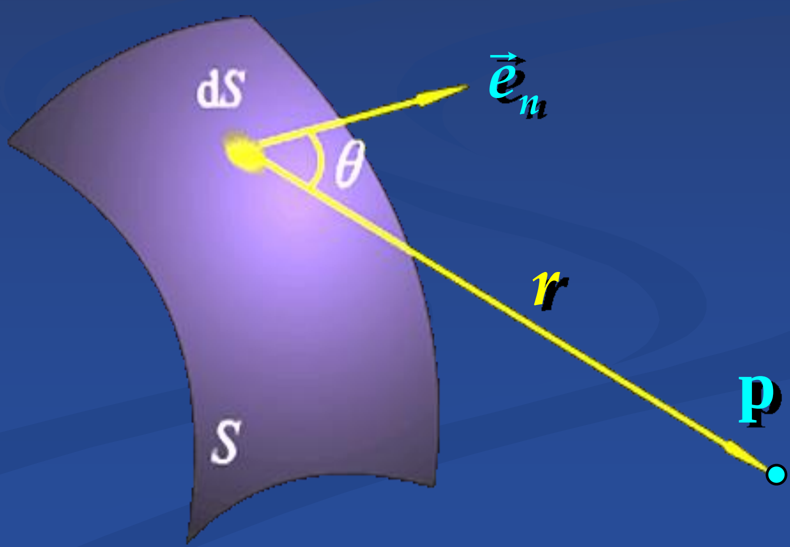
Fresnel-Kirchhofer衍射积分

$$E_{p}=c\iint_{S}\frac{a(x,y,z)}{r}k(\theta)\cdot dS\cdot cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda})$$

数学处理上:

▲**干涉**：有限个波的迭加，如双光波、多光波；

▲**衍射**：无限个波的迭加。

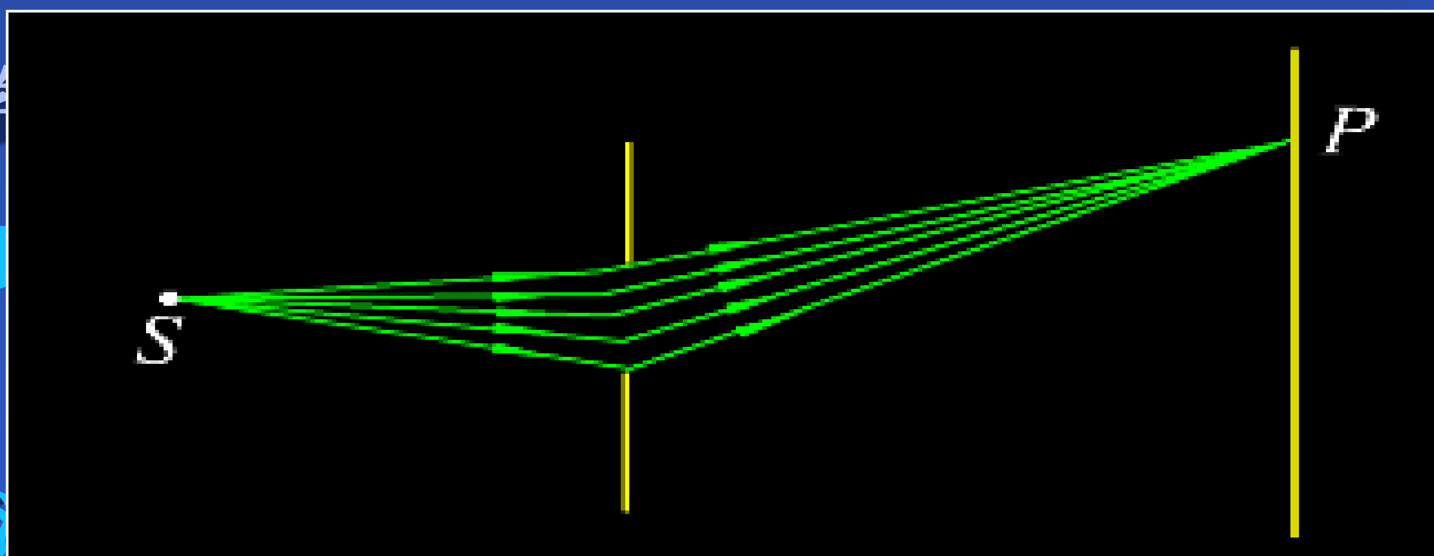


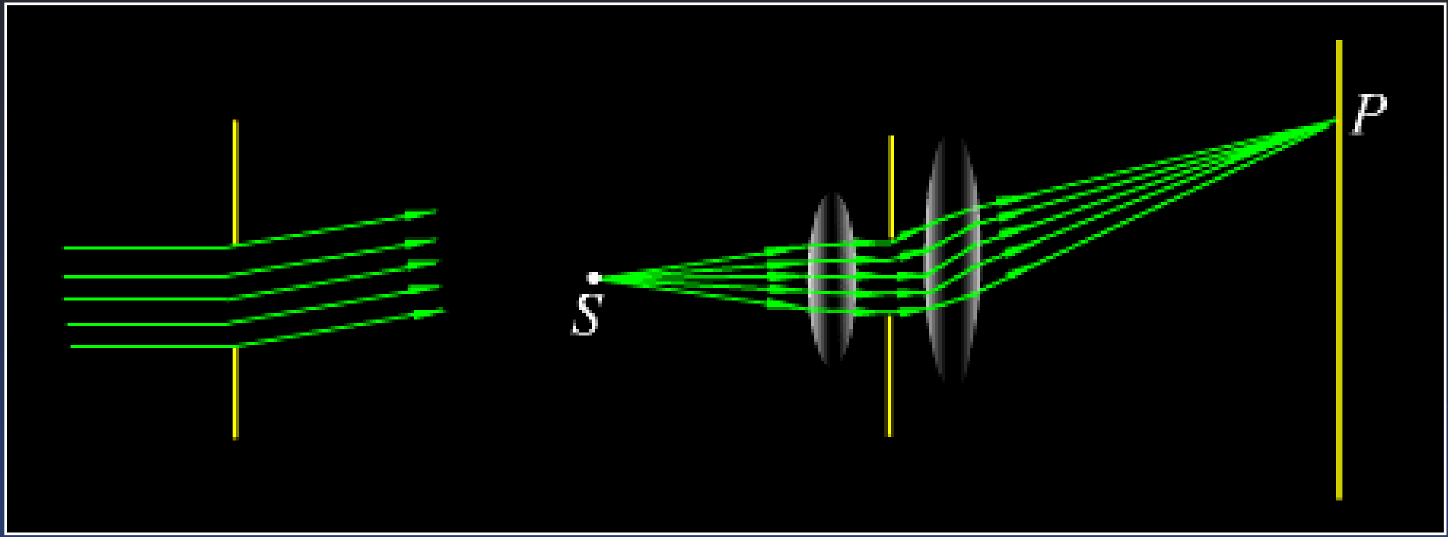
三、衍射的分类

■ 当光源及观察屏到衍射物的距离为**有限远**时：

近场衍射(*near-field diffraction*)----Fresnel (菲涅尔)衍射

数学





- 当光源及观察屏到衍射物的距离为**无限远**时

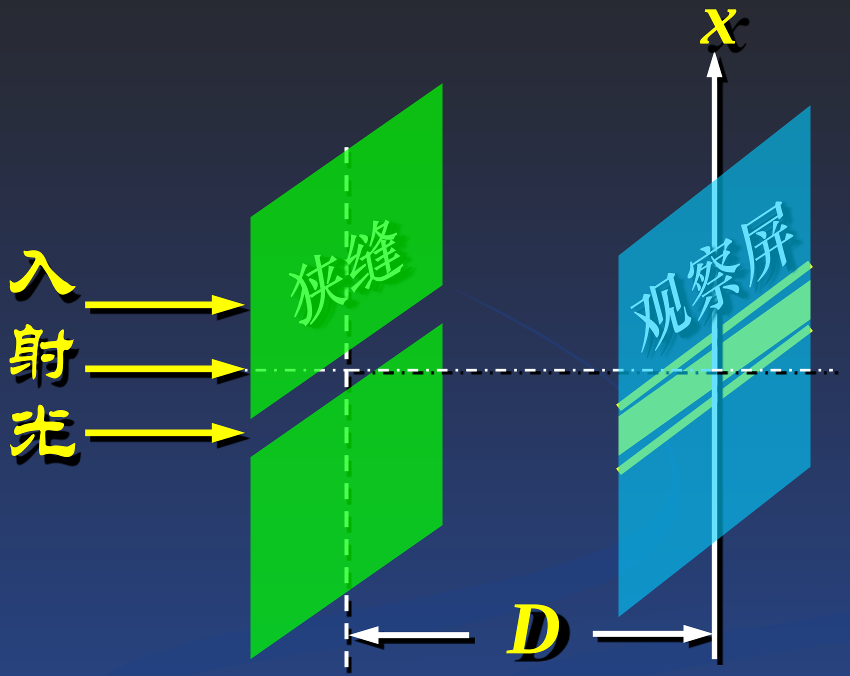
远场衍射(*far-field diffraction*) ----Fraunhofer 衍射

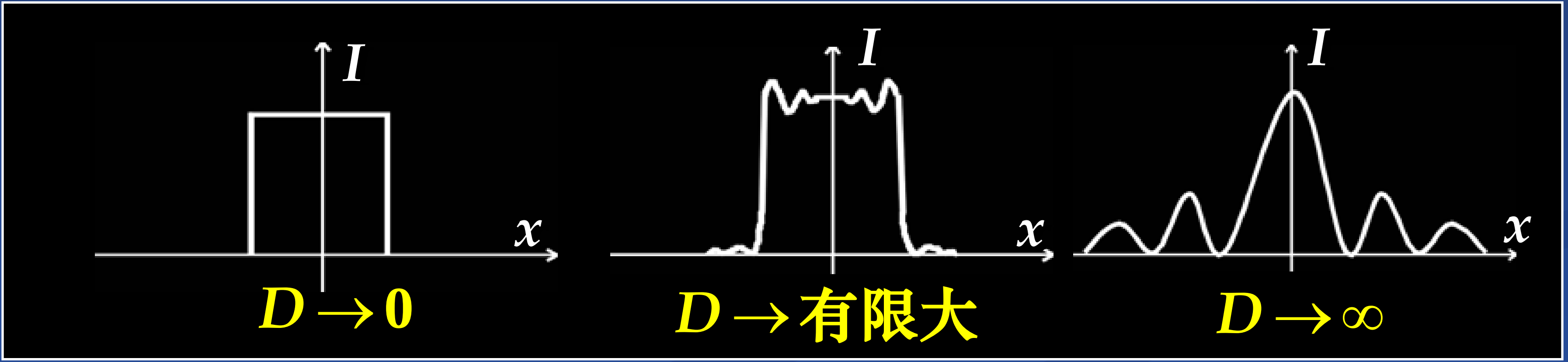
单缝的衍射:

$D \to 0$ 时：投影像（几何像）

$D \to$ 有限大时: 带条纹的投影像(近场衍射)

$D \to \infty$ 时:条纹(远场衍射)





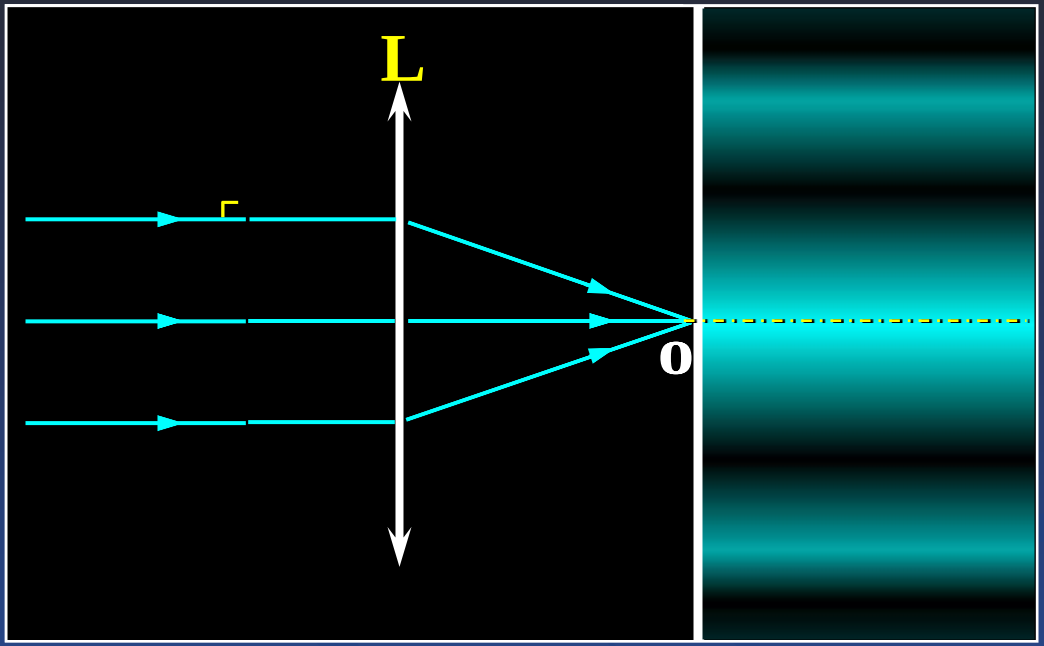
四、单缝*Fraunhofer*衍射的半波带分析方法

$\theta = 0$时，干涉相长

-----*中央明纹中心*

$\theta \neq 0$时，用半波带

方法讨论：



四、单缝Fraunhofer衍射的半波带分析方法

$\theta = 0$时，干涉相长

-----中央明纹中心

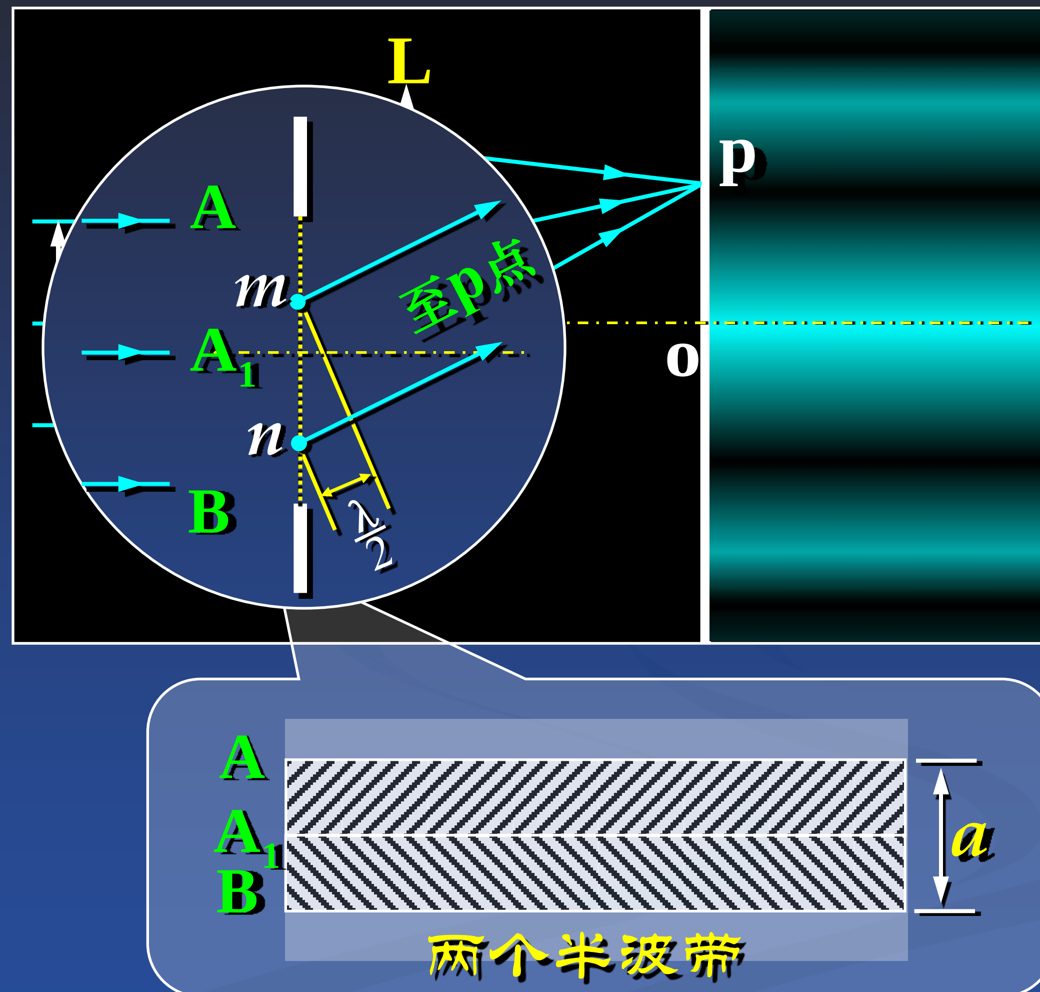
$\theta \neq 0$时，用半波带

方法讨论：

m、n在 p 点引起的

光振动之和：

$$\vec{E}_{mp} + \vec{E}_{np} = 0$$

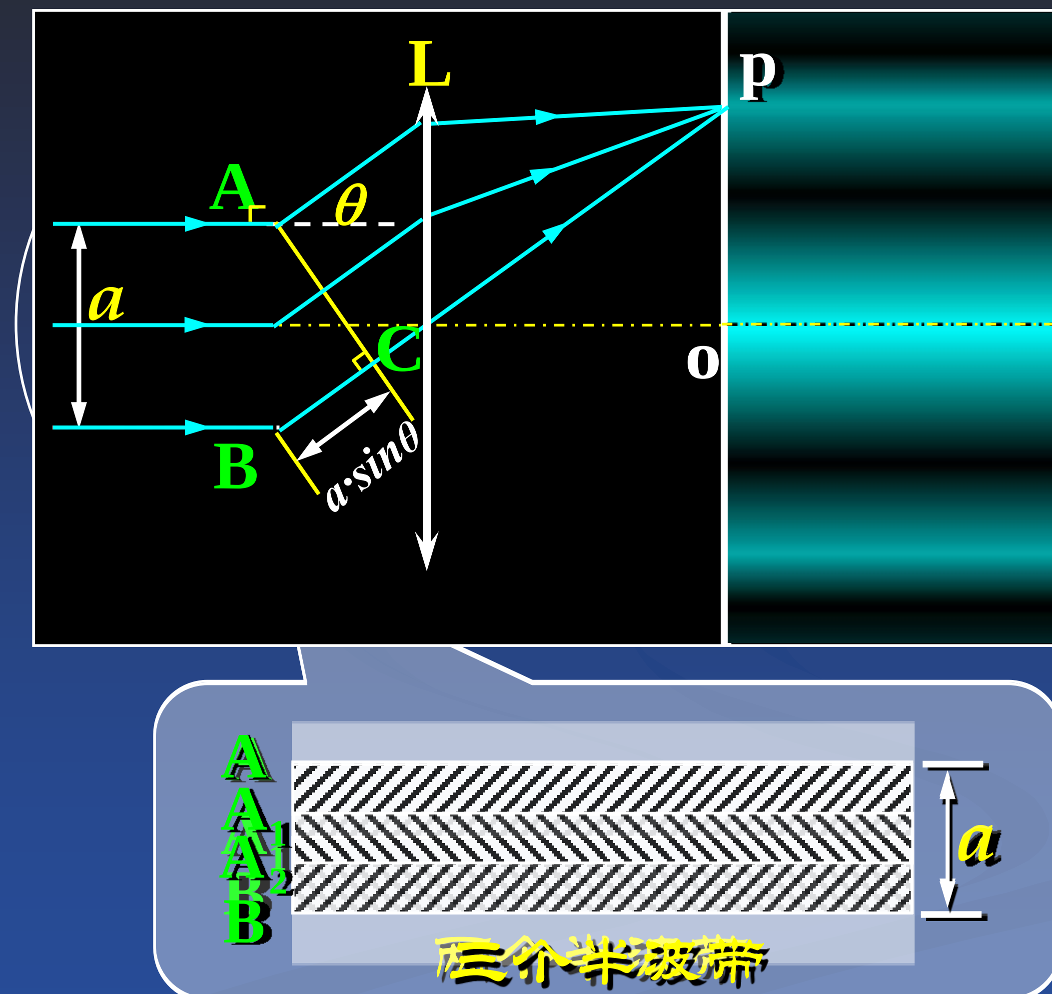


结论：相邻两个半波带所发出的各子波在远处相遇时会**干涉相消**！

若为**奇数**个半波带，

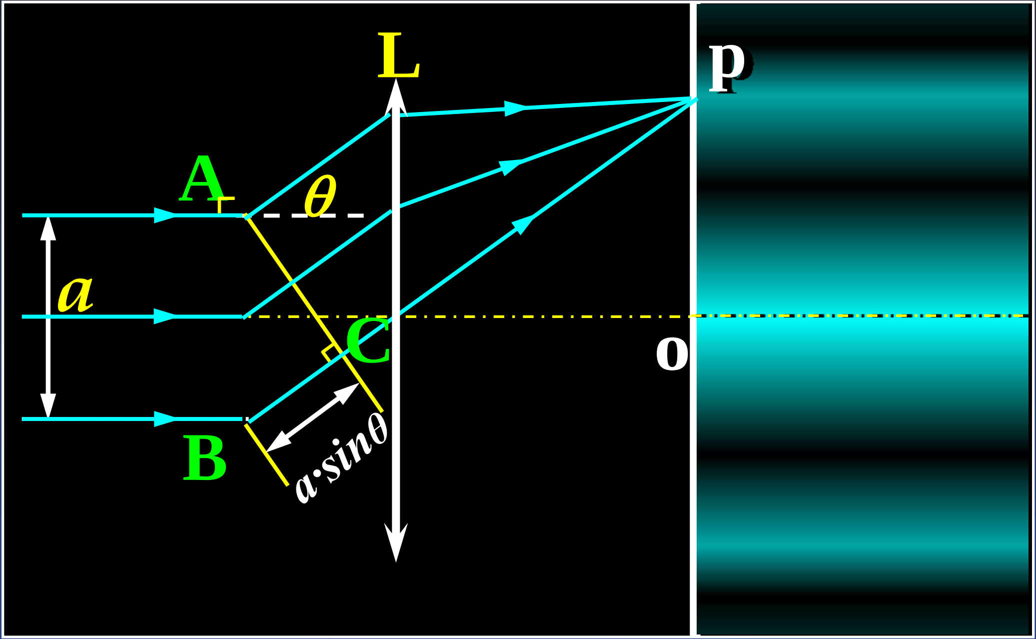
则 p 点为**明纹**！

$$BC = a \cdot \sin\theta$$



结论：相邻两个半波带所发出的各子波在远处相遇时

会干涉相消！



若为奇数个半波带，

则 p 点为明纹！

$$BC = a \cdot \sin\theta$$

半波带数： N

$$\theta \neq 0^\circ：\ a \cdot \sin\theta = \begin{cases} \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

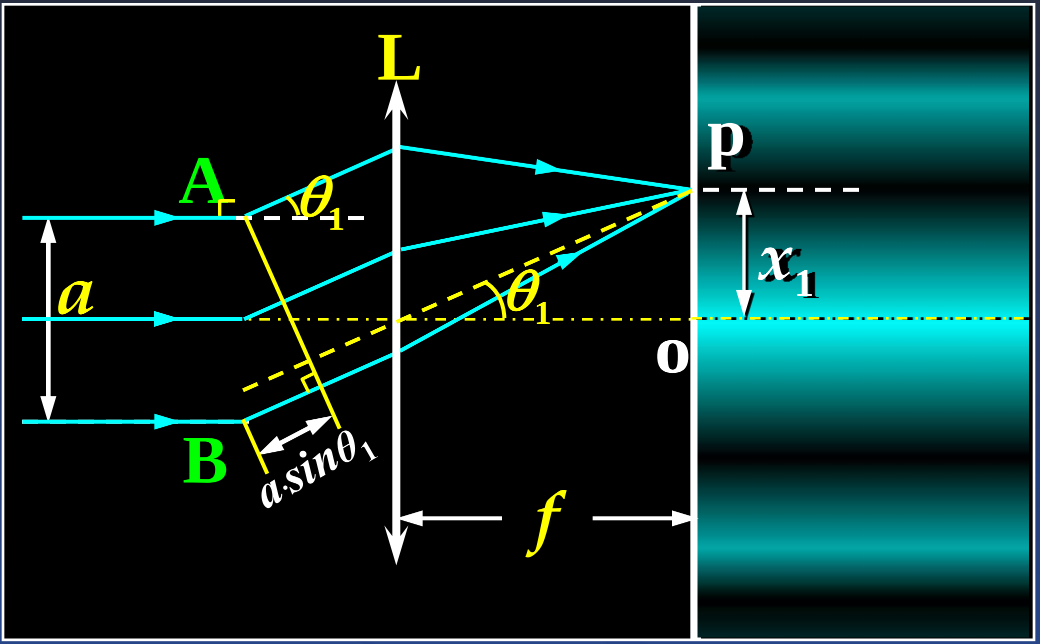
五、单缝Fraunhofer衍射的条纹宽度

θ：衍射角

设：$x \ll f$

第一级暗纹：

$$a \cdot \sin\theta_1 = 2 \times \frac{\lambda}{2}$$



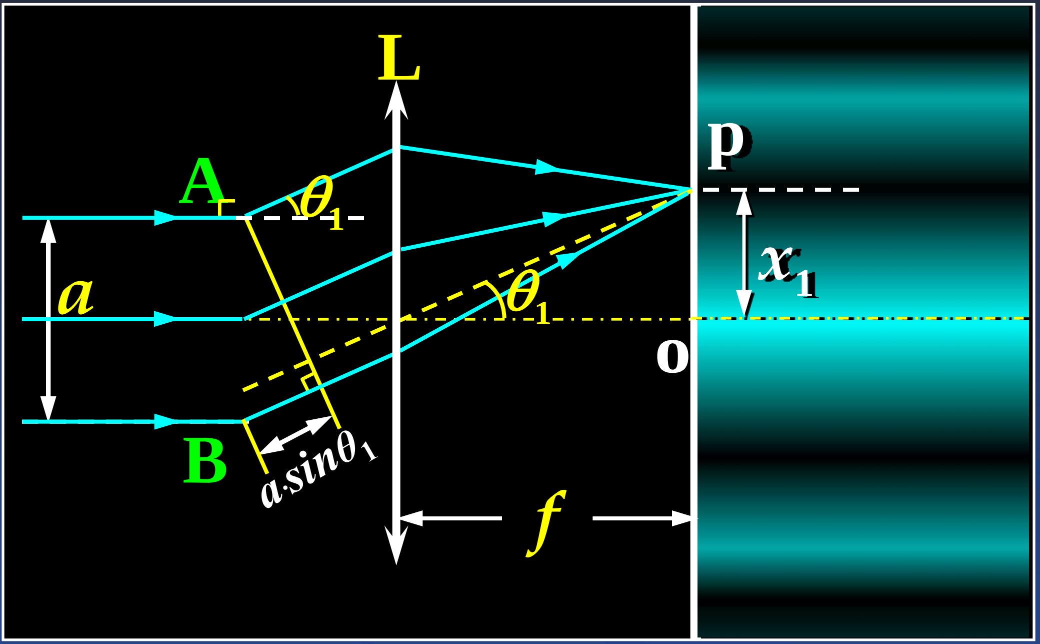
五、单缝Fraunhofer衍射的条纹宽度

θ ：衍射角

设： $x \ll f$

第一级暗纹：

$$a \cdot \sin\theta_1 = 2 \times \frac{\lambda}{2}$$



$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \quad \theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$$ （衍射反比律）

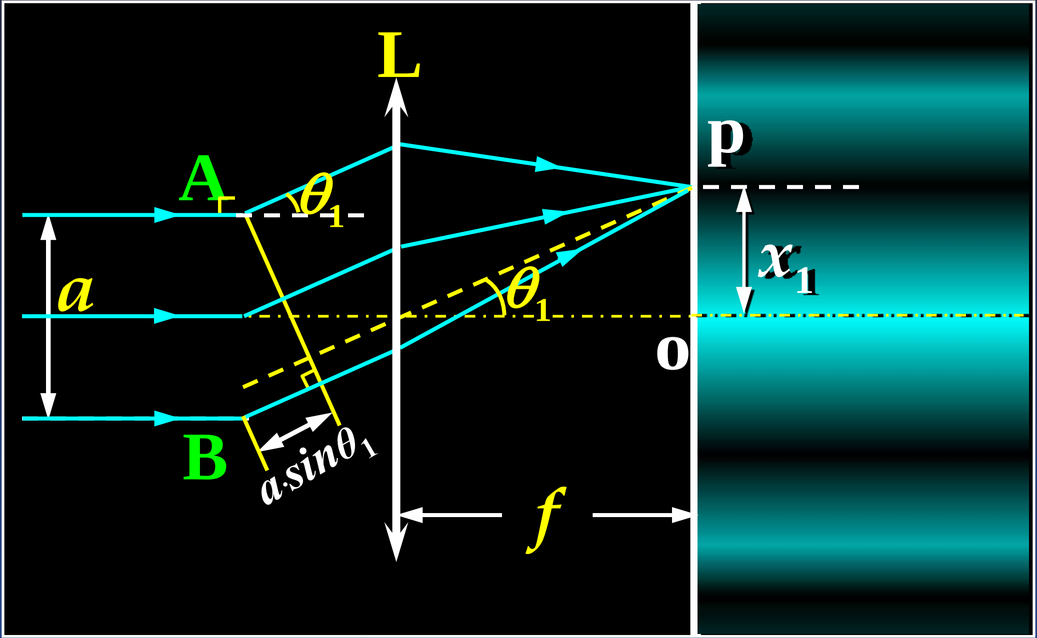
定义：中央明纹半角宽度 $\theta_1 \approx \dfrac{\lambda}{a}$ ；角宽度 $2\theta_1 \approx \dfrac{2\lambda}{a}$

中央明纹(线)宽度: $2x_1 = 2f \cdot tg\theta_1 \approx 2f \cdot \theta_1 = \dfrac{2f\lambda}{a}$

第二级暗纹:

$$a \cdot \sin\theta_2 = 4 \times \frac{\lambda}{2}$$

$$\theta_2 \approx \frac{2\lambda}{a}$$



$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \quad \theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$$ (衍射反比律)

定义：中央明纹半角宽度 $\theta_1 \approx \dfrac{\lambda}{a}$； 角宽度 $2\theta_1 \approx \dfrac{2\lambda}{a}$

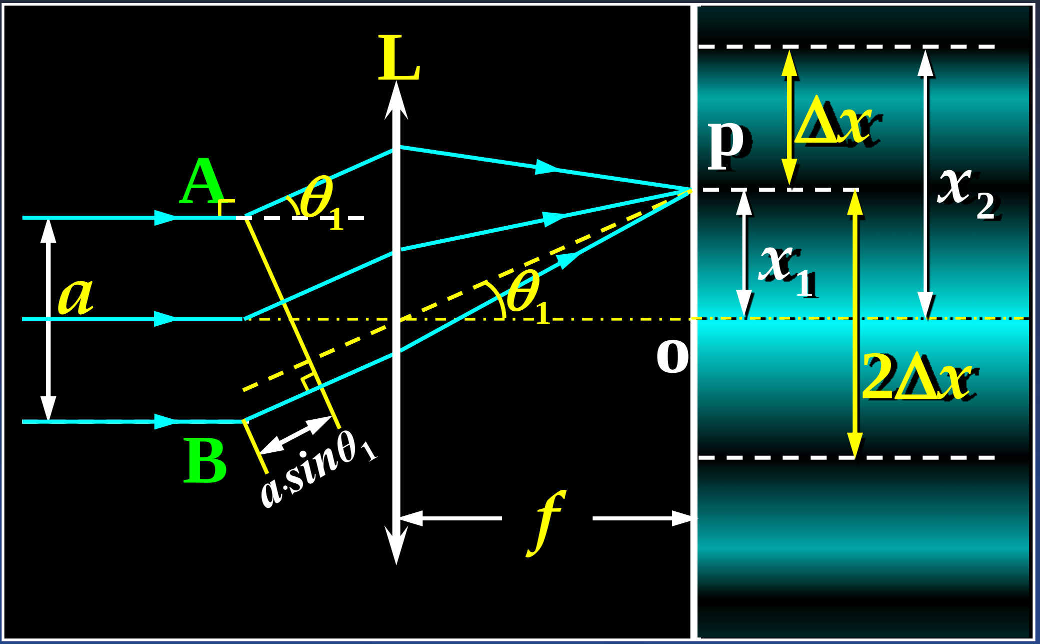
中央明纹(线)宽度: $$2x_1 = 2f \cdot tg\theta_1 \approx 2f \cdot \theta_1 = \frac{2f\lambda}{a}$$

第二级暗纹:

$$a \cdot \sin\theta_2 = 4 \times \frac{\lambda}{2}$$

$$\theta_2 \approx \frac{2\lambda}{a}$$

$$x_2 \approx f \cdot \theta_2 = \frac{2f\lambda}{a}$$



其他明纹宽度:

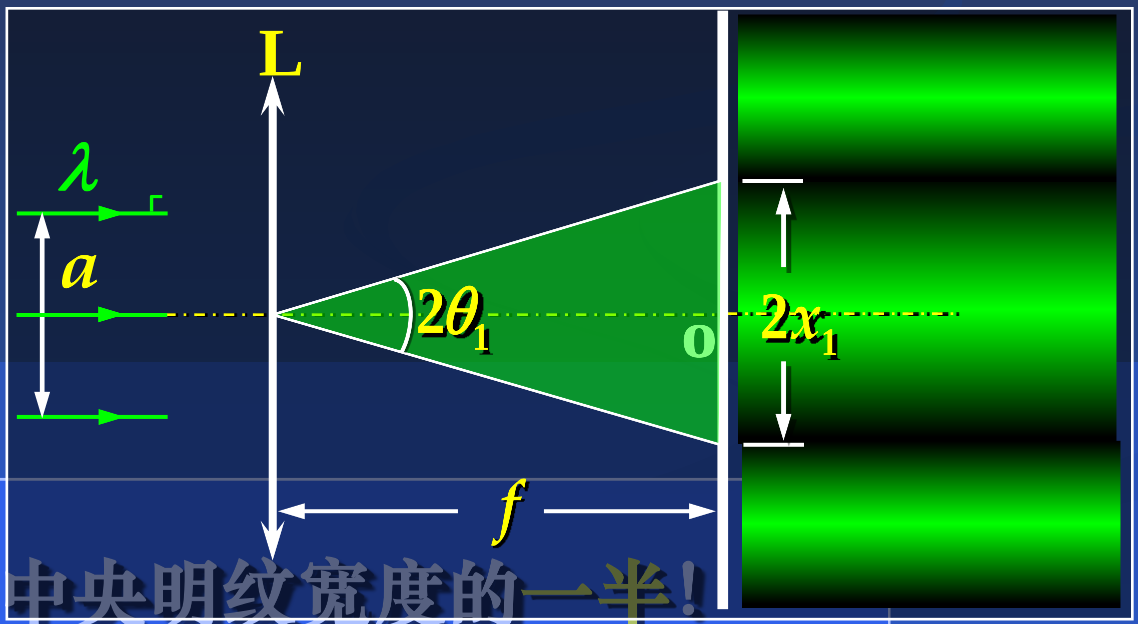
$$\Delta x = x_2 - x_1 \approx \frac{f\lambda}{a}$$ **= 中央明纹宽度的一半!**

例 单色光正入射, $\lambda = 500\text{nm}$, $a = 0.2\text{mm}$, $f = 20\text{cm}$，求中央明纹角宽度及线宽度。若入射光有两种：400nm、760nm，求两种光第一明纹中心间距。

解 $\theta_1 \approx \dfrac{\lambda}{a} \longrightarrow$ 中央明纹角宽度: $2\theta_1 \approx \dfrac{2\lambda}{a} = 5\times10^{-3}\ \text{rad}$

中央明纹线宽度:

$$2x_1 \approx f\cdot 2\theta_1$$



$$\Delta x = x_2 - x_1 \approx \frac{f\lambda}{a} = \text{中央明纹宽度的一半!}$$

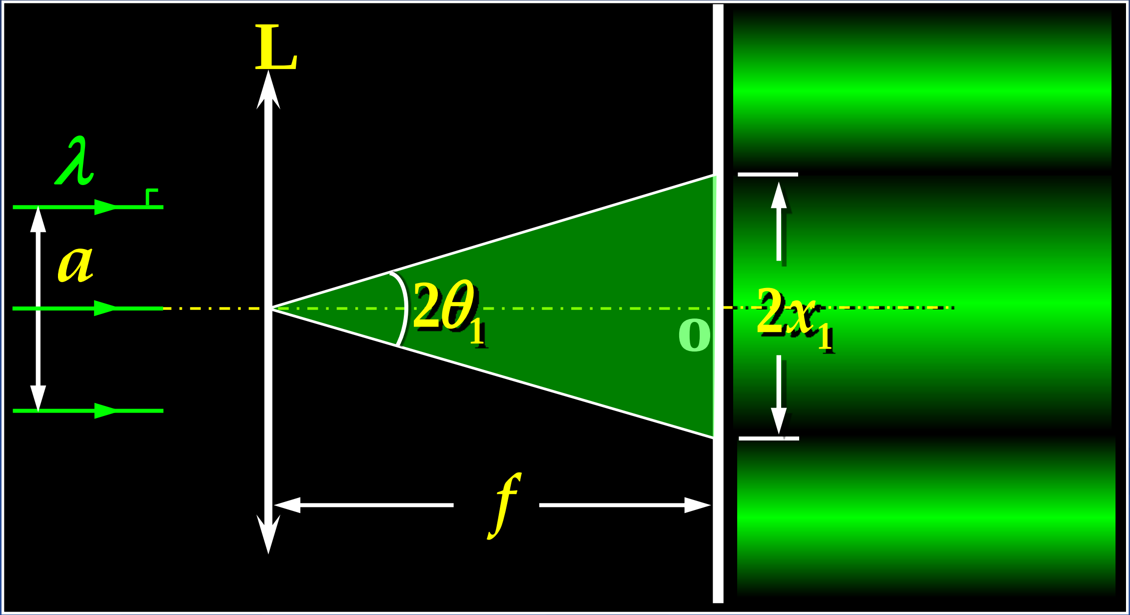
例 单色光正入射, $\lambda = 500\text{nm}$, $a = 0.2\text{mm}$, $f = 20\text{cm}$，求中央明纹角宽度及线宽度。若入射光有两种：400nm、760nm，求两种光第一明纹中心间距。

解 $\theta_1 \approx \dfrac{\lambda}{a}$ → 中央明纹角宽度: $2\theta_1 \approx \dfrac{2\lambda}{a} = 5\times10^{-3}\ \text{rad}$

中央明纹线宽度:

$$2x_1 \approx f\cdot 2\theta_1$$

$$= 0.1\,\text{cm}$$



明纹条件:

$$a \cdot \sin\theta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$ 第一明纹: $\xrightarrow{k=1}$ $$a \cdot \sin\theta_1' = \frac{3\lambda}{2}$$

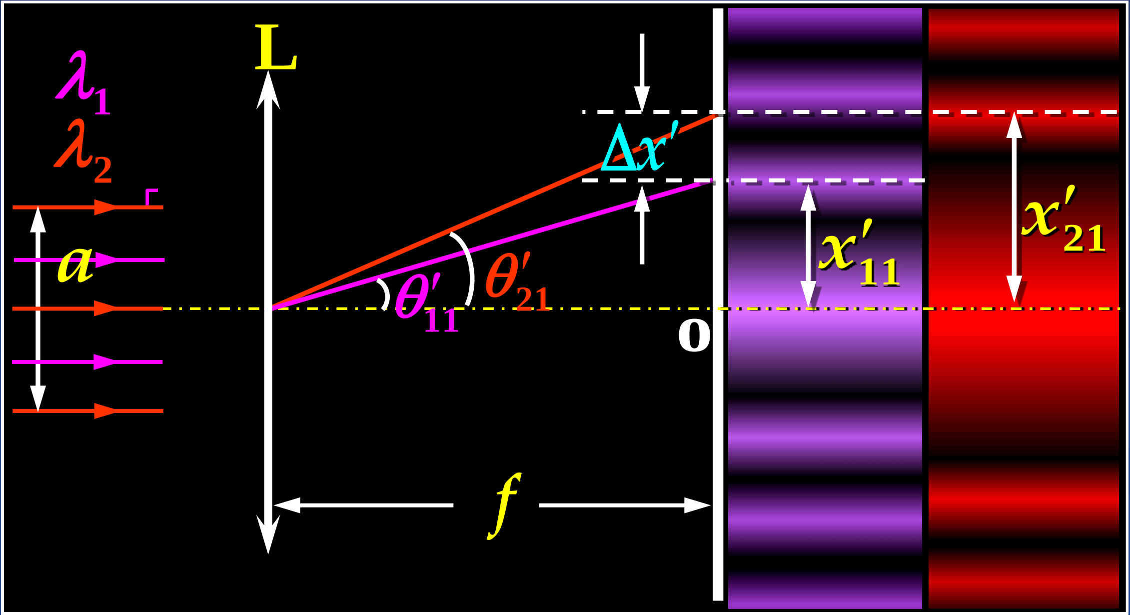
$$a >> \frac{3\lambda}{2} \quad \therefore \ \theta_1' \approx \frac{3\lambda}{2a}, \quad x_1' \approx f \cdot \theta_1' = \frac{3f}{2a}\lambda$$

两种单色光第一明纹间距:

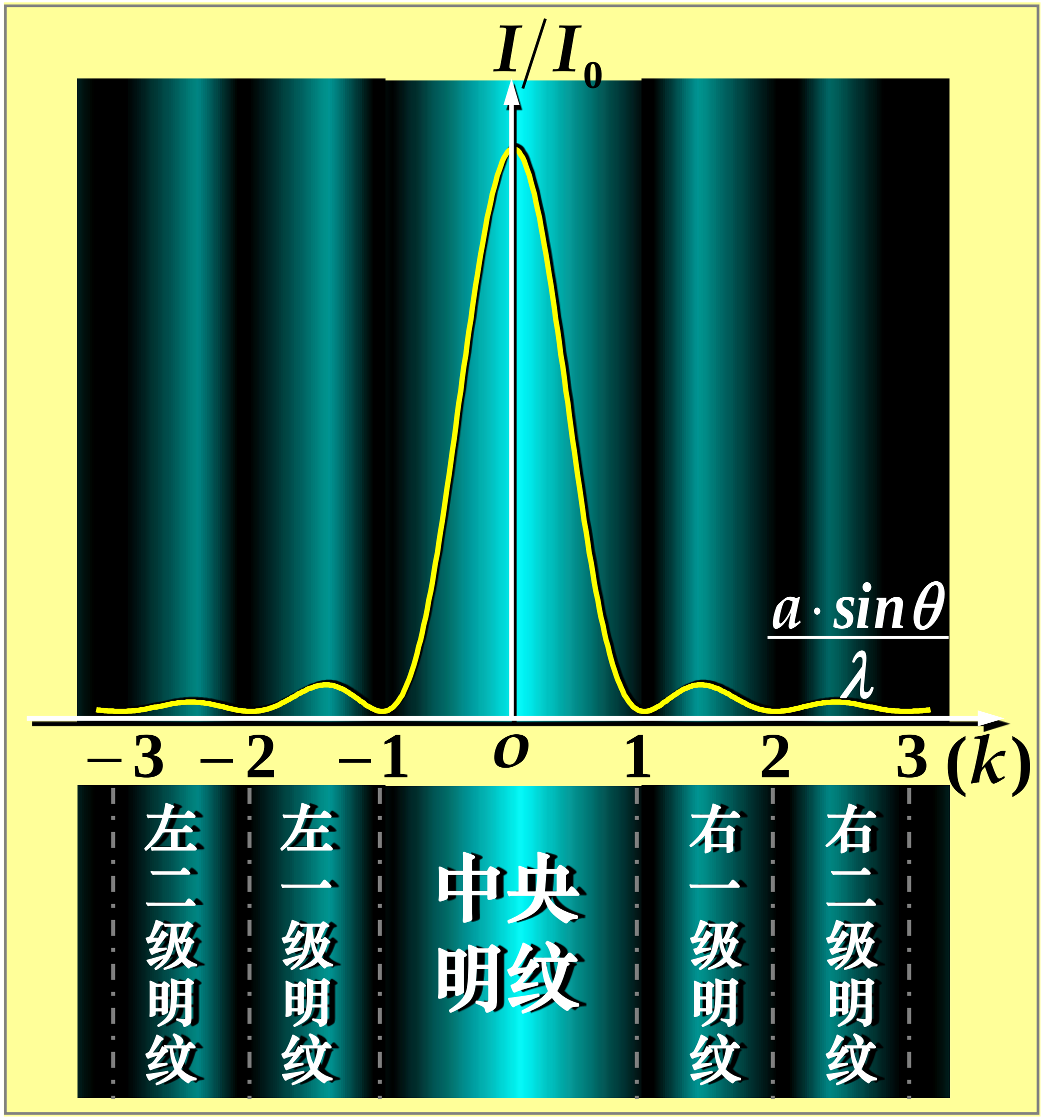
$$\Delta x' = x_{21}' - x_{11}'$$

$$\approx \frac{3f}{2a}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$= 0.54\,\text{mm}$$



六、单缝Fraunhofer衍射的光强分布



中央明纹：

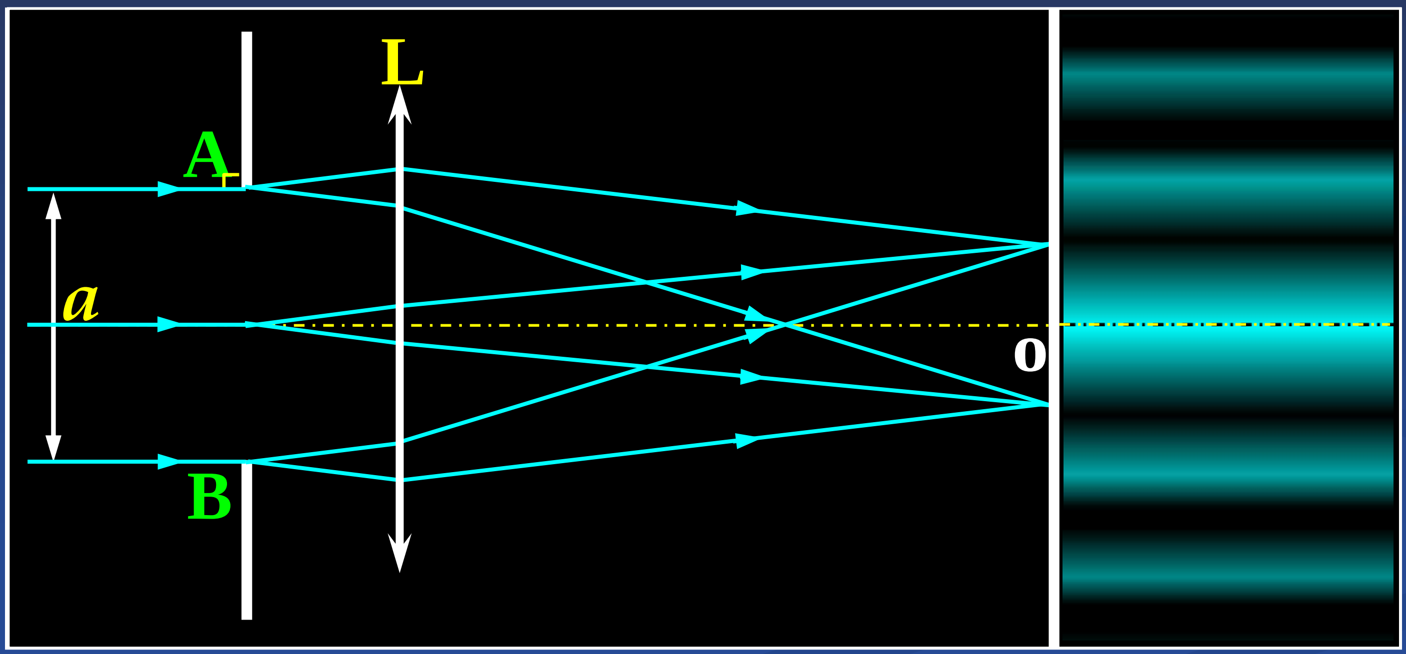
$$-\lambda < a\cdot\sin\theta < \lambda$$

- **最宽：**为其他明纹宽度的两倍。
- **最亮：**绝大部分能量集中在中央明纹区域内。

七、几点讨论

1. 动态变化:

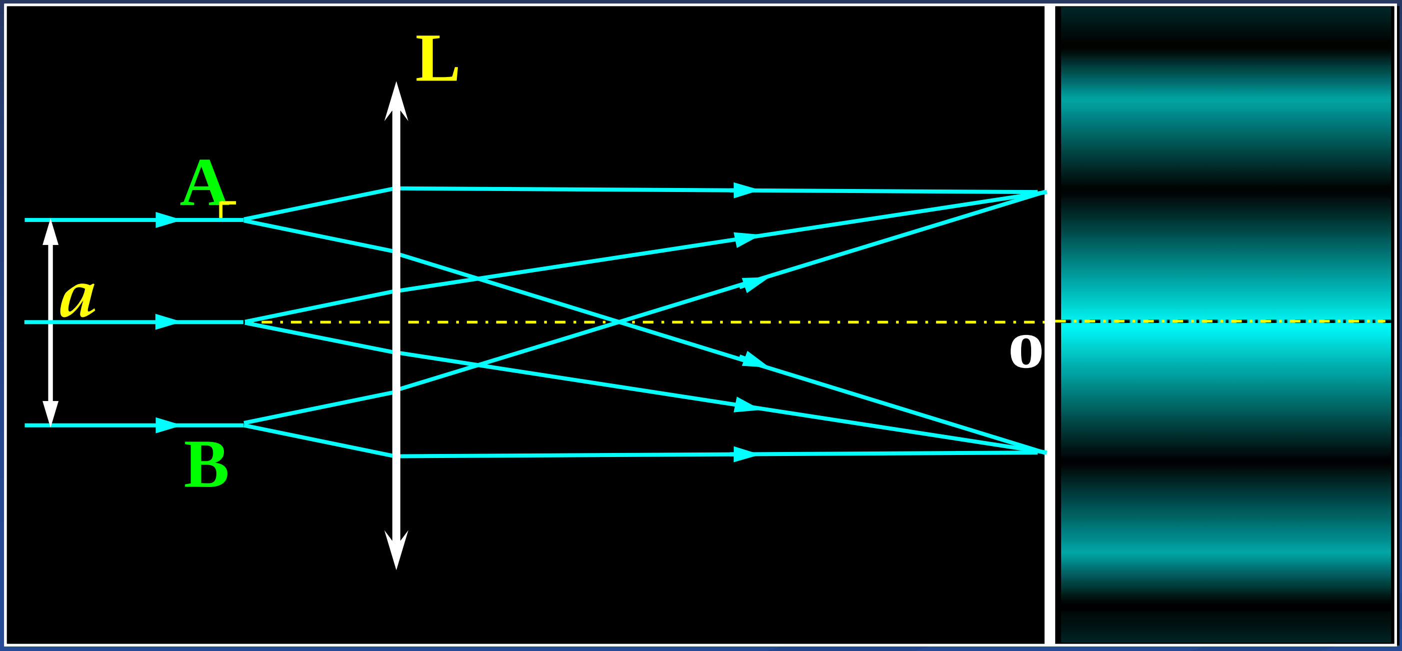
缝宽变化时: $\theta_1 \approx \dfrac{\lambda}{a}$ $a\downarrow \longrightarrow \theta_1\uparrow \longrightarrow$ 中央明纹展宽



透镜上下平移时:

对$\theta = 0$的一组衍射光之间: $\delta = 0$ ，会聚在焦点o处!

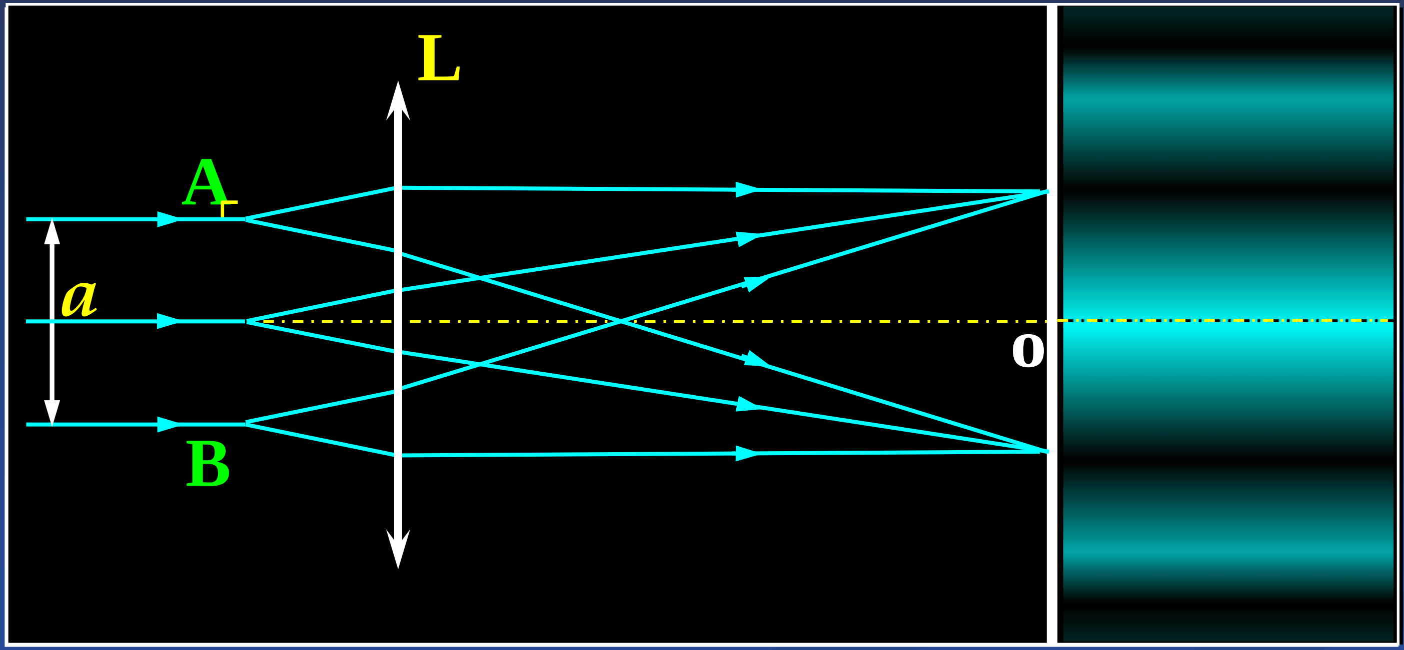
条纹随之上下移动!



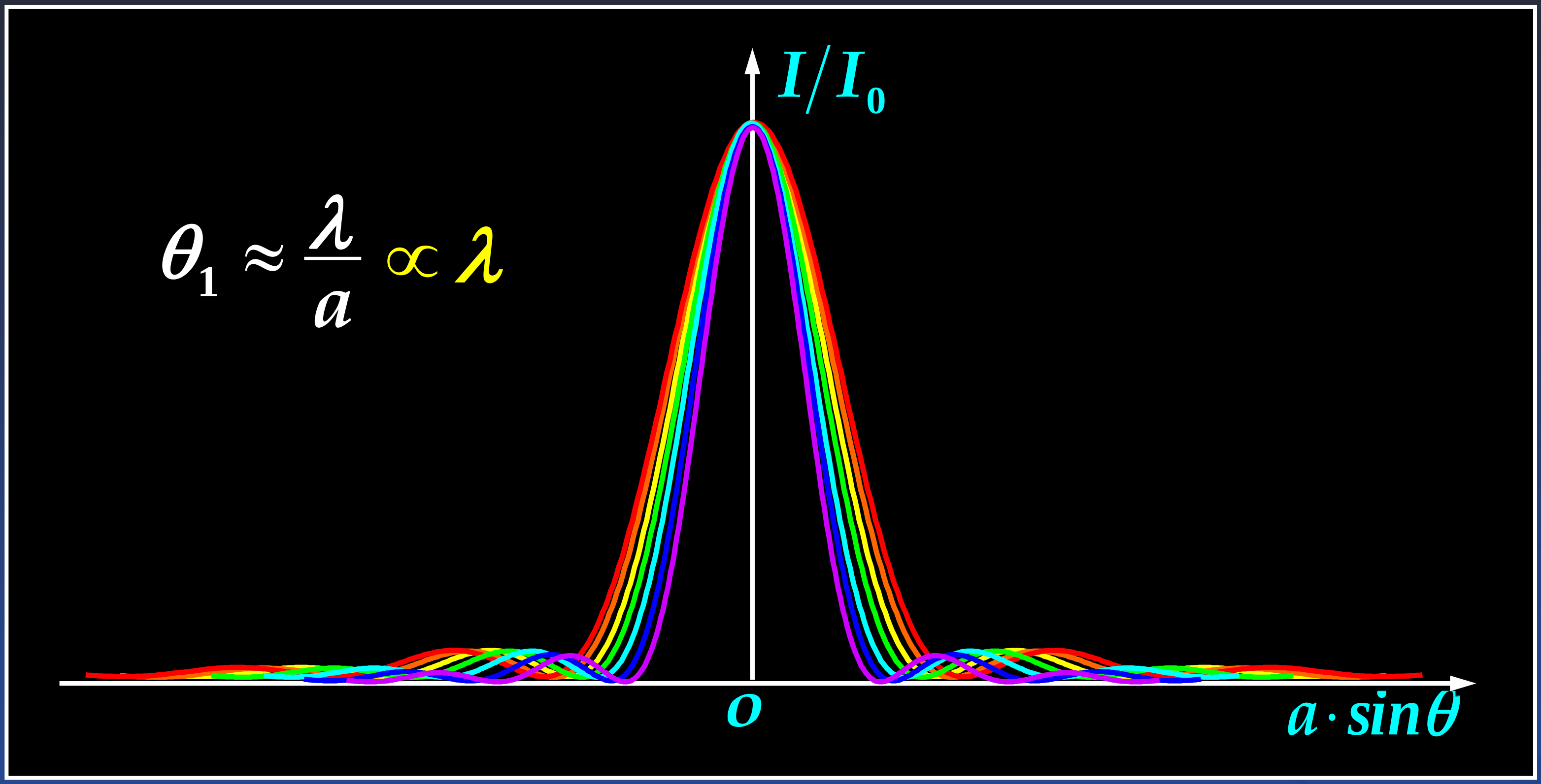
缝平面上下平移时:

对$\theta = 0$的一组衍射光之间:$\delta = 0$ ，会聚在焦点o处！

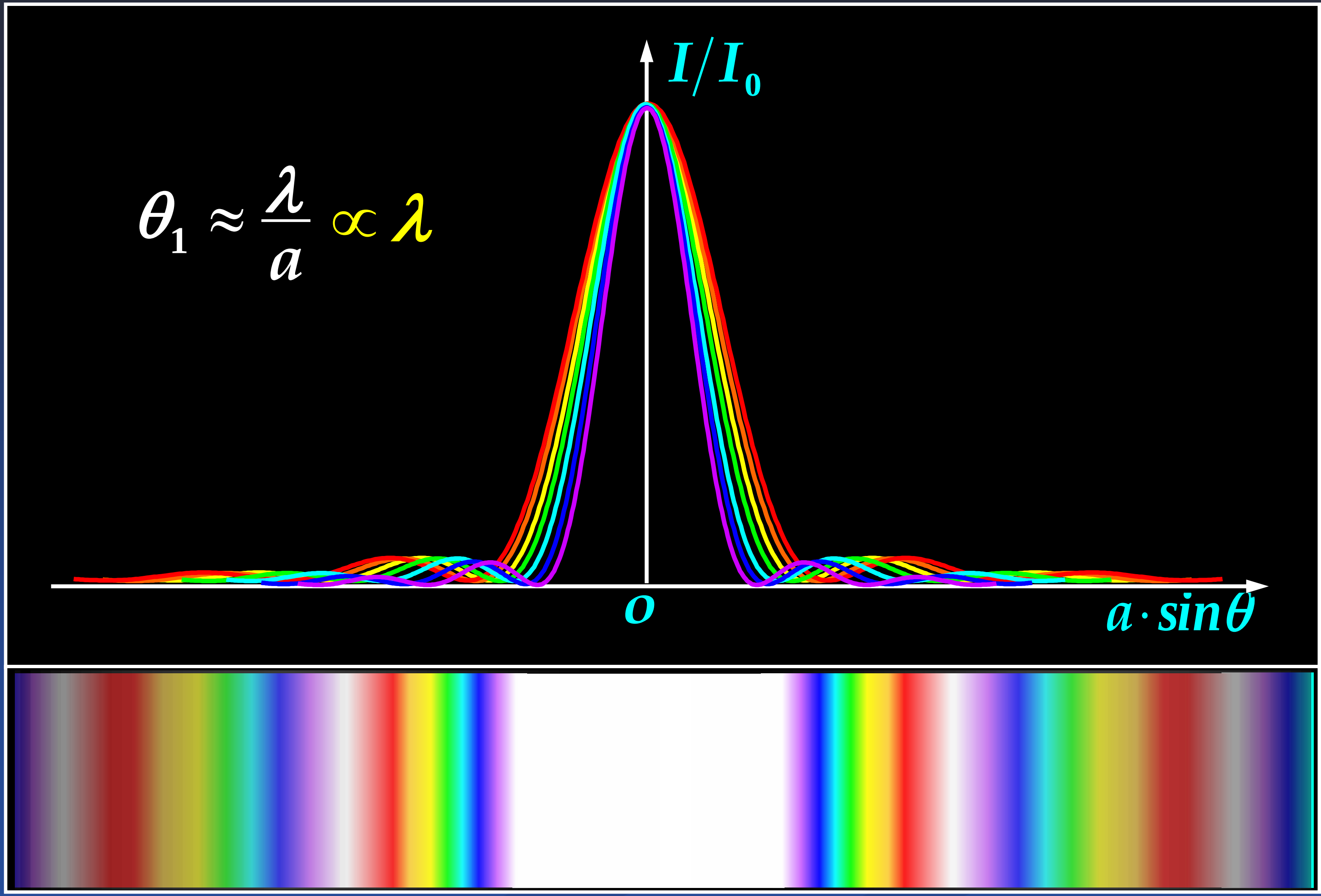
条纹位置不变!



2. 自光入射:


I/I_0
$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a} \propto \lambda$
o
$a \cdot \sin\theta$

3. 自光入射:


I/I_0
$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a} \propto \lambda$
o
$a \cdot \sin\theta$

归纳:

1. 惠更斯－菲涅尔原理:

2. 衍射分类: Fresnel 衍射 与 Fraunhofer 衍射

3. 单缝Fraunhofer衍射:

$$\text{条纹分布:}\ a\sin\theta=\begin{cases}2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗纹}\\[2ex] (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹}\end{cases}\qquad (k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

$\theta=0$ ------ 中央明纹

归纳:

4.单缝Fraunhofer衍射的中央明纹:

半角宽度 $\theta_1 \approx \dfrac{\lambda}{a}$；角宽度 $2\theta_1 \approx \dfrac{2\lambda}{a}$

最亮；最宽：为其他明纹宽度的两倍！

5.单缝Fraunhofer衍射的几点讨论:

动态变化：缝屏、透镜分别上下移动、缝宽变化对衍射图样的影响。

白光入射：衍射图样分布。